MVR – napredni kurs

VJEŽBE 7

1. Kocka se baca do prve pojave broja 2, ali ne više od 4 puta. Odrediti matematičko očekivanje i standardnu devijaciju slučajnih promjenljivih: X – broj izvedenih bacanja i Y broj dobijenih dvojki.

Rj. a – pojavila se dvojka

Vjerovatnoća da se u jednom bacanju kocke pojavi dvojka je $p(a) = \frac{1}{6}$, da se ne pojavi $p(\bar{a}) = \frac{5}{6}$. U našem primjeru ~~kocka~~ dvojka može da se pojavi u prvom, drugom, trećem, četvrtom pokušaju ili da se uopšte ne pojavi. X je slučajna promjenljiva koja predstavlja broj bacanja. Skup njenih vrijednosti je $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Da bi odredili ~~vjerovatnoći pojedinih ishoda slučajna~~ srednju vrijednost potrebno je da nađemo vjerovatnoću svake od mogućih vrijednosti slučajne promjenljive.

$X \qquad p(a)$

$1 \rightarrow p(1) = \frac{1}{6}$ – u prvom pokušaju se pojavila 2.

$2 \rightarrow p(2) = \underset{p(\bar{a})}{\frac{5}{6}} \cdot \underset{p(a)}{\frac{1}{6}}$ – " – nije – u drugom jeste

$3 - p(3) = \underset{p(\bar{a})}{\frac{5}{6}} \cdot \underset{p(\bar{a})}{\frac{5}{6}} \cdot \underset{p(a)}{\frac{1}{6}}$

$4 - p(4) = \begin{cases} \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} & \text{– jeste se pojavila} \\ + \\ \frac{5}{6} \frac{5}{6} \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} & \text{– nije} \end{cases}$

$$E_X = \sum X \cdot p(X) = 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3) + 4 \cdot p(4) =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{5}{6} \frac{5}{6} \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{5}{6} \frac{5}{6} \frac{5}{6} \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \right) =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{5}{18} + \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{3} \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{6} = 3.1$$

$$EX^2 = \sum X^2 p(x) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{5}{6} \frac{5}{6} \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{5}{6} \frac{5}{6} \frac{5}{6} = 11.0231$$

$$V_X = E(X^2) - (E(X))^2 = 11.0231 - (3.1)^2 = 1.413 \qquad \sigma_X = \sqrt{V_X} = 1.19$$

Y broj dobijenih dvojki. Može imati vrijednost 0 i 1 $Y=\{0,1\}$. Nula ako se ni u jednom bacanju nije pojavila 2, a završen je eksperiment i sva četiri pokušaja iskorišćena

$$p(Y0)=p(\bar{2}\bar{2}\bar{2}\bar{2})=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5^4}{6^4}$$

Jedan će imati ako se dvojka pojavi u nekom od 4 bacanja, dakle, u prvom ili drugom ili trećem ili četvrtom, pa je vjerovatnoća sa kojom slučajna promjenjiva uzima vrijednost 1 $\quad 1-p(Y0)=1-\frac{5^4}{6^4}$

$$p(Y1)=p(2)+p(2\bar{2})+p(22\bar{2})+p(222\bar{3})=$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=$$

$$=\frac{6^3+5\cdot 6^2+5^2\cdot 6+5^3}{6^4}=$$

$$=\frac{671}{6^4}\leftarrow$$

$V_x=0.25$

$Ex=\sum x\,p_x=0\cdot\frac{5^4}{6^4}+\frac{671}{6^4}=0.5177 \qquad Ex^2=\sum x^2 p_x=0.5177$

2. Eksperiment se sastoji u bacanju tri kocke. Neka je događaj A pojavljivanje brojeva 3 ili 6 (na bilo kojoj kocki) a neka je X- broj ostvarenja događaja A u seriji od 3 eksperimenta. Odrediti matematičko očekivanje i standardnu devijaciju slučajne varijable X

vjerovatnoću ostvarivanja događaja A

Rj.

Prvo posmatramo šta bi se desilo kada bi bacali jednu kocku. Kolika bi bila vjerovatnoća da se pojavi brojevi 3 ili 6. Označimo ovaj događaj sa A1

$$p(A1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\quad p(\bar{A}_1)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Sada gledamo šta bi se moglo desiti kada bi imali 3 kocke. Događaj A se ostvario ako se na bilo kojoj kocki pojavio broj 3 ili 6 prilikom jednog bacanja. Pogledamo šta se može desiti u jednom bacanju.

Događaj A može ili da se ostvari ili ne. Neće se ostvariti ako se bace tri kocke i ne pojave se brojevi 2 i 6 ni na prvoj ni na drugoj ni na trećoj kocki.

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A_1} \cdot \bar{A_1} \cdot \bar{A_1}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^3}{3^3}$$

Ovo se moglo desiti samo na jedan način, da se ni na jednoj kocki ne pojave 2 ili 6. Događaj A se može ostvariti na više načina.

Da se neki od ova dva broja pojavi samo na jednoj kocki. Imamo tri takve mogućnosti ~~koje se p~~, ovi brojevi se mogu pojaviti na prvoj, drugoj ili trećoj kocki, dakle vjerovatnoća da se ~~je~~ ~~broj~~

$$P(A) = \cancel{3 \cdot P(\bar{A_1} \cdot \bar{A_1} \cdot A} \quad P(A_1 \bar{A_1} \bar{A_1}) + P(\bar{A_1} A_1 \bar{A_1}) + P(\bar{A_1} \bar{A_1} \cdot A) +$$
$$+ P(A_1 A_1 \bar{A}) + P(A_1 \bar{A} A_1) + P(\bar{A_1} A_1 A_1) + P(A_1 A_1 A_1) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2^2}{3^2} + 3 \cdot \frac{1^2}{3^2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1^3}{3^3}$$

Dalje, neki od ova dva broja se može pojaviti na ~~sve~~ dvije od tri bačene kocke. Opet imamo tri moguće kombinacije, da se pojavi na I i II, I i III ili II i III, i na kraju može se desiti da se neki od ova dva broja pojavi na sve tri kocke. Tu imamo samo jednu moguću realizaciju. Izračunali smo da je vjerovatnoća da se događaj A realizuje pri jednom bacanju kocke $P(A) = \frac{3 \cdot 2^2}{3^3} + \frac{3 \cdot 2}{3^3} + \frac{1}{3^3}$, a da se ne realizuje $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{2^3}{3^3}$ (način da provjerite logiku koju ste koristili) $1 - \frac{2^3}{3^3} = \frac{19}{27}$

~~šta~~ X – broj ostvarenja događaja A u seriju od 3 eksperimenta. Moguće vrijednosti su $X = \{0, 1, 2, 3\}$. Pogledajmo koje su vjerovatnoće da X uzme pojedinu vrijednost iz skupa mogućih.

$$P(0) = P(\bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \bar{A}) = \frac{2^3}{3^3} \cdot \frac{2^3}{3^3} \cdot \frac{2^3}{3^3} = 0.026$$

$$p(A)=\frac{19}{27} \quad p(\bar{A})=\frac{8}{27}$$

$$P(1)=P(A\bar{A}\bar{A})+P(\bar{A}A\bar{A})+P(\bar{A}\bar{A}A)=\frac{19}{27}\cdot\frac{8}{27}\frac{8}{27}+\frac{8}{27}\frac{19}{27}\cdot\frac{8}{27}+\frac{8}{27}\frac{8}{27}\frac{19}{27}$$

Jedno ~~realizacija~~ ostvarenje, samo se pri jednom od 3 bacanja pojavila 2 ili 6. Može biti pri prvom, drugom ili trećem

$$P(1)=3\frac{64\cdot 19}{(27)^3}=\cancel{0.0678} \quad 0.1853$$

$$P(2)=P(AA\bar{A})+P(A\bar{A}\bar{A})+P(\bar{A}AA)=\frac{19}{27}\cdot\frac{19}{27}\cdot\frac{8}{27}+\frac{19}{27}\frac{8}{27}\cdot\frac{19}{27}+\frac{8}{27}\frac{19}{27}\frac{19}{27}$$

Dva ostvarenja. Dva puta je realizovan događaj A. Može biti pri prvom i drugom, prvom i trećem, drugom i trećem

$$P(2)=3\cdot 0.1467=0.4402$$

$$P(3)=\frac{19}{27}\cdot\frac{19}{27}\cdot\frac{19}{27}=0.3485$$

Tri ostvarenja - samo jedan način, da se u sva ~~na sve tri kocke~~ tri eksperimenta pojavi 2 ili 6 makar jednom

$$Ex=\sum x\cdot px=0\cdot p(0)+1\cdot p(1)+2\cdot p(2)+3\cdot p(3)=0.1853+2\cdot 0.4402+3\cdot 0.3485=2.112$$

$$Ex^2=\cancel{0\cdot p(0)}\ \sum x^2 px=0^2 p(0)+1^2 p(1)+2^2 p(2)+3^2\cdot p(3)=$$
$$=1\cdot p(1)+4\cdot p(2)+9\cdot p(3)=0.1853+4\cdot 0.4402+9\cdot 0.3485=$$
$$=5.0826$$

$$V_x=Ex^2-(Ex)^2=5.0826-(2.112)^2=0.6221$$

$$\sigma_x=0.7887 \text{ - devijacija.}$$

(3) U kutiji se nalazi 6 bijelih, 3 plave i 2 crvene kuglice. Iz kutije se izvlače četiri kuglice (bez vraćanja). Neka je slučajna varijabla X - broj izvučenih kuglica bijele boje. Odrediti matematičko očekivanje i standardnu devijaciju slučajne varijable X.

~~$p(5)=\frac{6}{}$~~ bijelih 6

plavih 3

crvene 2

Moguće vrijednosti X su $X=\{0,1,2,3,4\}$

Vjerovatnoća da uzme pojedinu iz skupa mogućih vrijednosti

$p(0) = p(pc \cdot pc \cdot pc \cdot pc) = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{11 \cdot 10 \cdot 9} \quad \binom{4}{0} = \frac{4!}{0!\,4!} = 1$

Sve 4 izvučene su bile crvene ili plave

$p(1) = 4 \cdot p(B \cdot pc \cdot pc \cdot pc) = 4 \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \quad \Big| \; \frac{4!}{1!} = \frac{4!}{1!\,3!} = 4$

Jedna od izvučenih je bijela – može biti prva, druga, treća ili četvrta

$p(2) = 6 \cdot p(B \cdot B \cdot pc \cdot pc) = 6 \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8}$

Dvije izvučene kuglice su bijele. Može biti I II ili I III ili I IV ili II III ili II i IV ili III i IV, dakle $6 \binom{4}{2}$ mogućih realizacija, sve su sa istom vjerovatnoćom

$p(3) = 4 \cdot p(BBBpc) = 4 \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8}$

Tri izvučene kuglice su bijele. Može biti I, II i III ili I, II i IV, ili I, III, IV i II, III i IV $\binom{4}{3}$ Dakle 3 moguće realizacije sa vjerovatnoćom istom $\frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$

$p(4) = 1 \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$

Četiri izvučene su bijele. Jedna realizacija $\binom{4}{4} = \frac{4!}{4!\,0!} = 1$

$$E_x = \sum X \cdot p_x = 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3) + 4 \cdot p(4)$$

$$= 4 \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot 6 \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} + 4 \cdot 1 \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} =$$

$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4(4 \cdot 3 + 12 \cdot 5 + 12 \cdot 5 + 12)}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{12 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}(1 + 5 + 5 + 1) = 2.\cancel{6182}\,1818$$

$$E_{x^2} = \sum x^2 p_x = 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) + 4 \cdot p(2) + 9 \cdot p(3) =$$

$$= 1 \cdot 4 \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot 6 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 11} + 9 \cdot 4 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8} +$$

$$+ 16 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{16 \cdot 6 \cdot 5(3 + 30 + 45 + 12)}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8} = 5.4545$$

$$V_x = E_{x^2} - (E_x)^2 = 5.4545 - (2.1818)^2 = 0.6942$$

$$\sigma_x = \sqrt{V_x} = 0.8332$$

4) U kutiji se nalazi 8 bijelih i 16 crnih kugli. Iz kutije se izvlače kuglice (bez vraćanja) do prve pojave bijele kuglice, ali ne više od 4 puta. Odrediti matematičko očekivanje i standardnu devijaciju slučajne varijable X – broj izvučenih

kuglica — Y - broj izvučenih kuglica bijele boje

Rj.

8 - bijelih

16 - crnih

$X = \{1, 2, 3, 4\}$

$P(X1) = \frac{8}{24}$

$P(X2) = \frac{16}{24} \cdot \frac{8}{23}$

$P(X3) = \frac{16}{24} \cdot \frac{15}{23} \cdot \frac{8}{22}$

$P(X4) = \frac{16}{24} \cdot P(cccB) + P(cccc) = \frac{16}{24} \cdot \frac{15}{23} \cdot \frac{14}{22} \cdot \frac{8}{21} + \frac{16}{24} \cdot \frac{15}{23} \cdot \frac{14}{22} \cdot \frac{13}{21} =$

$= \frac{16}{24} \cdot \frac{15}{23} \cdot \frac{14}{22}$

Što se moglo i očekivati jer ako su izvučene 3 crne naredna će biti ili bijela ili crna sa vjerovatnoćom 1.

$Ex = \sum x \cdot px = 1 \cdot \frac{8}{24} + 2 \cdot \frac{16}{24} \cdot \frac{8}{23} + 3 \cdot \frac{16}{24} \cdot \frac{15}{23} \cdot \frac{8}{22} + 4 \cdot \frac{16}{24} \cdot \frac{15}{23} \cdot \frac{14}{22}$

$Ex = 2.3781$

$Ex^2 = \sum x^2 p(x) = 1 \cdot \frac{8}{24} + 4 \cdot \frac{16}{24} \cdot \frac{8}{23} + 9 \cdot \frac{16}{24} \cdot \frac{15}{23} \cdot \frac{8}{22} + 16 \cdot \frac{16}{24} \cdot \frac{15}{23} \cdot \frac{14}{22} = 7.1107$

$Vx = Ex^2 - (Ex)^2 = 7.1107 - (2.3781)^2 = 1.4553$

$\sigma x = 1.2064$

$Y = \{0, 1\}$

$P(Y0) = P(cccc) = \frac{16}{24} \cdot \frac{15}{23} \cdot \frac{14}{22} \cdot \frac{13}{21} = 0.1713$ $\Downarrow$ $P(Y1) = 1 - P(Y0) =$

$P(Y1) = P(B) + P(cB) + P(ccB) + P(cccB) = \frac{8}{24} + \frac{16}{24} \cdot \frac{8}{23} + \frac{16}{24} \cdot \frac{15}{23} \cdot \frac{8}{22} + \frac{16}{24} \cdot \frac{15}{23} \cdot \frac{14}{22} \cdot \frac{8}{21}$

$P(Y1) = 0.8287$

$Ex = \sum x \cdot px = 0 \cdot P(Y0) + 1 \cdot P(Y1) = P(Y1) = 0.8287$

$Ex^2 = 0.8287$ $\quad Vy = Ex^2 - (Ex)^2 = 0.142$

~~$Vy = 0$ $\sigma y = 0$~~